引文格式:梁伟,徐新禹,李建成,等.一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(5):935-943.DOI:10.13203/j.whugis20240321

Citation:LIANG Wei,XU Xinyu,LI Jiancheng,et al.A High Performance Scientific Computation Method for High-Resolution Earth's Gravity Field Modeling[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2026,51(5):935-943.DOI:10.13203/j.whugis20240321

一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法

梁 伟[1,2] 徐新禹[2,3] 李建成[2] 李朋远[1] 黄 剑[1] 朱天林[1]
王东亚[1] 苑 刚[1]

1 北京跟踪与通信技术研究所,北京,100094
2 中南大学地球科学与信息物理学院,湖南 长沙,410083
3 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

摘 要:利用多源重力观测数据构建高分辨率全球重力场模型是重力场研究的基本任务之一。将半解析方法引入高分辨率重力场模型构建,同时采用开放多处理(open multi-processing,OpenMP)+信息传递接口(message passing interface,MPI)并行计算思路,设计了一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法,该方法可以在大型集群计算系统下分布式运行。数值实验验证了计算方法的计算精度和效率,结果表明:半解析方法可有效减少模型构建的计算量和内存消耗,解算30′分辨率重力场模型的计算效率是传统块对角最小二乘方法的7倍;使用OpenMP+MPI混合并行算法的计算效率是串行程序的18倍(20个计算核心);利用4个节点的80个中央处理器可在1 d内完成2′高分辨率重力场模型的解算。

关键词:高分辨率重力场模型;高性能科学计算;OpenMP+MPI混合并行编程

中图分类号:P223 **文献标识码**:A **收稿日期**:2025-07-15

DOI:10.13203/j.whugis20240321 **文章编号**:1671-8860(2026)05-0935-09

A High Performance Scientific Computation Method for High-Resolution Earth's Gravity Field Modeling

LIANG Wei[1,2] *XU Xinyu*[2,3] *LI Jiancheng*[2] *LI Pengyuan*[1] *HUANG Jian*[1] *ZHU Tianlin*[1]
WANG Dongya[1] *YUAN Gang*[1]

1 Beijing Institute of Tracking and Telecommunications Technology, Beijing 100094, China
2 School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China
3 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

Abstract: **Objective**: The computation task in high resolution Earth's gravity field modeling is very huge, as the dataset and the parameters are dramatically. We focus on high performance and scientific computation method in high-resolution Earth's gravity field modeling to make model determination feasible. **Methods**: The basic methods we used for high performance and computing are the semi-analysis method, open multi-processing (OpenMP) and message passing interface (MPI) parallel computing method. A new high performance and scientific computing method is designed. The semi-analysis method is also known as the lumped-coefficients method. The OpenMP and MPI technique are to make use of the huge-computing machine. And afterward the method is validated by numerical experiments on computing error and computing efficiency. **Results**: The semi-analysis can effectively reduce the computation and storage consumption in

基金项目:国家自然科学基金(42388102,42192533,42074019)。

第一作者:梁伟,博士,助理研究员,主要从事空间态势感知、高分辨率重力场模型构建研究。wliang@whu.edu.cn

通信作者:苑刚,博士,研究员。yuangang1978@126.com

high-resolutoin gravity field modeling. The time consumption of OpenMP+MPI hybrid parallel computing is only 1/18.4 that of sequential computing with 20 cores. The proposed computing method with semi-analysis and OpenMP+MPI computing can be used on super computers for Earth's gravity field modeling, and the modeling of coefficients up to degree and order 5 399 can be completed within one day using 80 central processing unit on 4 nodes. **Conclusions**: High performance and scientific computing is useful for high-resolution gravity field modeling, the method need to be improved tested for finer resolution field gravity field modeling.

Key words: high-resolution gravity field model; high performance computing; OpenMP+MPI hybrid parallel computing

重力场是地球的基本物理场,高分辨率重力场模型广泛应用于地球科学的相关领域,包括确定大地水准面、统一全球高程基准、计算动态海面地形、确定地球内部各圈层的分界面等。近年来,在国际地球重力场模型中心发布的高分辨率地球重力场模型有EGM2008[1]、EIGEN-6C4[2]、GOCO05c[3]、XGM2019e[4]和SGG-UGM-2[5]等。高分辨率重力场模型求解时使用的数据量大、求解的参数多、数学模型复杂,求解过程中需要消耗的计算资源庞大、计算耗时长,是制约高分辨率重力场模型解算的重要因素,研究高分辨率重力场模型的高性能科学计算方法具有非常重要的应用价值。

高性能科学计算通常包括科学计算和高性能计算(high performance computing, HPC)。科学计算指通过设计更加高效的计算方法以优化计算模型,减少计算消耗,实现快速计算,例如快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)方法[6-7]。FFT方法是重力场及相关领域目前使用最多的科学计算方法,文献[7]最早将FFT方法用于全球重力场计算,解决了球谐综合和球谐分析的快速计算问题,文献[8]介绍了FFT方法在全球重力数据球谐分析中的应用。文献[9]介绍了块对角最小二乘(block-diagonal least square, BDLS)方法的使用条件,并将其用于求解重力场模型。文献[7]分析了多种块对角形式,如EGM2008、EIGEN-6C4、SGG-UGM-2、XGM2019等模型求解时都使用了BDLS方法。在卫星重力场建模中,文献[10-11]在卫星重力梯度观测数据处理中提出了基于一维FFT和二维FFT的半解析(semi-analysis, SA)方法,又称Lumped-Coefficients(LC)方法,其中基于二维FFT的SA方法又称为Torus方法。文献[12-13]分别使用数值模拟和实测数据介绍了SA方法在卫星重力场模型解算中的应用。

HPC是指利用并行计算程序和大规模并行计算机系统完成计算任务。HPC并不能减少计算任务的计算总量,它是将庞大的计算任务分配到多个计算核心上同时完成计算任务,从而降低计算耗时。常用的并行计算技术有开放多处理(open multi-processing, OpenMP)并行计算技术[14]和信息传递接口(message passing interface, MPI)并行计算技术[15-16]。文献[15-18]分别将OpenMP并行计算技术用于卫星重力数据处理、卫星重力场模型反演和高分辨率重力场模型构建。文献[19-20]分别使用HPC解决了地理计算和全球导航卫星系统数据处理中的大规模计算问题。文献[21]采用MPI并行计算技术设计的高分辨率重力场模型的解算程序,在求解重力场模型时使用了上千个计算核心及TB量级的内存。一些可以处理矩阵运算的并行数学库中使用了MPI并行计算,例如PBLAS、ScaLAPACK[22],可以直接调用这些并行数学计算库将重力场模型解算中的矩阵运算并行化。

随着重力数据、地形数据的分辨率不断提高,解算高分辨率重力场模型的阶次越来越高,构建模型所需的计算量也越来越庞大。本文将卫星重力场建模常用的SA方法用于高分辨率重力场构建,结合OpenMP+MPI混合并行编程技术,设计了一种构建高分辨率重力场模型的高性能科学计算方法,并通过数值实验进行了验证分析。

1 理论与方法

1.1 利用SA方法解算高分辨率重力场模型系数

重力异常观测值$\Delta g(r,\vartheta,\lambda)$的地球重力场模型球谐展开式为[23]:

$$\Delta g(r,\vartheta,\lambda)=\frac{GM}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}\cos(m\lambda)+\bar{S}_{nm}\sin(m\lambda)\right)\bar{P}_{nm}(\cos\vartheta) \tag{1}$$

式中,G、M是地心引力常数;a是参考椭球的长半轴;(r,ϑ,λ)为球坐标;地球重力场模型球谐系数是地球引力位的球谐系数,而引力位是正常位和扰动位之和,$\bar{C}_{nm}$、$\bar{S}_{nm}$是扰动位的球谐系数;$\bar{P}_{nm}$是完全正规化的勒让德函数;n、m分别为勒让德函数和球谐系数的阶和次。

调换式(1)中级数求和的次序可得:

$$\Delta g(r,\vartheta,\lambda)=\sum_{m=0}^{N_{\max}}\{\cos(m\lambda)\cdot\left[\sum_{n=\max\{m,2\}}^{N_{\max}}\frac{GM}{r^2}(n-1)\bar{C}_{nm}\bar{P}_{nm}(\vartheta)\right]+\sin(m\lambda)\cdot\left[\sum_{n=\max\{m,2\}}^{N_{\max}}\frac{GM}{r^2}(n-1)\bar{C}_{nm}\bar{P}_{nm}(\vartheta)\right]\} \tag{2}$$

式中,$N_{\max}$是待求重力场模型的最高阶。

定义LC系数A_m、B_m为[8]:

$$\begin{cases}A_m=\sum\limits_{n=\max\{m,2\}}^{N_{\max}}\frac{GM}{r^2}(n-1)(\frac{a}{r})^n\bar{C}_{nm}\bar{P}_{nm}(\delta)\\ B_m=\sum\limits_{n=\max\{m,2\}}^{N_{\max}}\frac{GM}{r^2}(n-1)(\frac{a}{r})^n\bar{S}_{nm}\bar{P}_{nm}(\delta)\end{cases} \tag{3}$$

将式(3)代入到式(2)中可得:

$$\Delta g=\sum_{m=0}^{N_{\max}}(\cos(m\lambda)A_m+\sin(m\lambda)B_m) \tag{4}$$

球面规则等角格网的重力异常可以表示为Δg_{ij},其中i表示第i个纬度带,j表示第j个子午圈,Δg_{ij}可以表示为:

$$\Delta g_{ij}=\sum_{m=0}^{N_{\max}}(\cos(m\lambda_j)A_m^i+\sin(m\lambda_j)B_m^i) \tag{5}$$

式中,A_m^i和B_m^i分别表示第i个纬度带上m次的LC系数。

若有第i个纬度带上的重力异常$\Delta g_{ij},j=1,2,\cdots,2N$(其中$N$表示纬度带的个数),根据FFT方法的特点[6-8],由纬度带上的重力异常数据可以用FFT方法快速计算得到该纬度带上所有的LC系数A_m^i、B_m^i。其中,$m=0,1,2,\cdots,N_{\max}$;$i=1,2,\cdots,N$。

根据LC系数与重力场模型系数的线性关系式(式(3)),可以由LC系数建立$\bar{C}_{nm}$和$\bar{S}_{nm}$的观测方程。例如,可以由系数$A_2^i(i=1,2,\cdots,N)$建立如下的观测方程:

$$\begin{bmatrix}A_2^1\\A_2^2\\\vdots\\A_2^N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots&\frac{GM}{r^2}(N_{\max}-2)(\frac{a}{r})^{N_{\max}-1}\bar{P}_{N_{\max}-1,2}(\delta_1)&\cdots&\frac{GM}{r^2}(N_{\max}-1)(\frac{a}{r})^{N_{\max}}\bar{P}_{N_{\max}2}(\delta_1)\\ \cdots&\frac{GM}{r^2}(N_{\max}-2)(\frac{a}{r})^{N_{\max}-1}\bar{P}_{N_{\max}-1,2}(\delta_2)&\cdots&\frac{GM}{r^2}(N_{\max}-1)(\frac{a}{r})^{N_{\max}}\bar{P}_{N_{\max}2}(\delta_2)\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \cdots&\frac{GM}{r^2}(N_{\max}-2)(\frac{a}{r})^{N_{\max}-1}\bar{P}_{N_{\max}-1,2}(\delta_N)&\cdots&\frac{GM}{r^2}(N_{\max}-1)(\frac{a}{r})^{N_{\max}}\bar{P}_{N_{\max}2}(\delta_N)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\bar{C}_{22}\\\bar{C}_{42}\\\vdots\\\bar{C}_{32}\\\bar{C}_{52}\\\vdots\\\bar{C}_{N_{\max}2}\end{bmatrix} \tag{6}$$

若有全球覆盖的球面重力异常数据,可以计算得到所有的LC系数A_m^i和B_m^i,然后建立重力场模型系数的观测方程:

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varepsilon}\\ D\{\boldsymbol{y}\}=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}=\sigma_0^2\boldsymbol{P}^{-1}\end{cases} \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{y}$是LC系数观测向量;$\boldsymbol{A}$是根据式(3)计算的设计矩阵;$\boldsymbol{x}$是待求的系数向量;$\boldsymbol{\varepsilon}$是数据误差向量;$D\{\boldsymbol{y}\}$是误差的方差-协方差矩阵;$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$分别为数据权阵及其逆矩阵;σ_0^2是单位权方差。

建立观测方程后,可以在最小二乘准则下求解模型系数。解算观测方程时,按照一定次序排列待求参数,使用LC系数构建的法方程具有块对角特性,因此可以使用BDLS方法求解式(7)的观测方程,高效解算重力场模型系数。

由重力异常数据使用SA方法快速求解重力场模型系数的过程如下:

$$\Delta g_{ij}\xrightarrow{\text{FFT}}(A_m^i,B_m^i)\xrightarrow{\text{BDLS}}(\bar{C}_{nm},\bar{S}_{nm}) \tag{8}$$

由于式(8)使用了FFT方法和BDLS方法,该方法的计算效率大幅提高,具体情况将通过数值实验分析验证。

1.2　OpenMP+MPI混合高性能并行计算模型

HPC一般指使用超级计算机、大规模集群系统等大型计算系统快速高效解算科学和工程中的计算问题。使用HPC进行模型求解时,需要使用一定的并行计算模型,本节主要介绍OpenMP、MPI和OpenMP+MPI混合并行模型的基本原理。

1.2.1　OpenMP并行算法设计

OpenMP是面向共享内存的多线程并行计算模型,如图1所示。OpenMP并行计算模型计算时会在一定的规则下产生多个线程,这些线程会在计算节点的多个计算核心上运行,共享节点内的内存,线程间无需进行通信就可以直接访问所有数据。OpenMP计算模型的运行模式是:(1)开始计算时,主线程开始运行,主线程负责完成变量定义等基本功能;(2)计算到预先定义的并行区后,会按照预先定义的方式开辟子线程组,这

些线程会共享整个程序的数据或内存,在不同的中央处理器(central processing unit,CPU)下运行,相互协作完成整个计算任务;(3)并行区结束之后,子线程结束,仅主线程执行程序的串行部分,直到遇到下一个并行区;(4)遇到下一个并行区后按照相同的方式执行并行区,直到程序结束[14]。

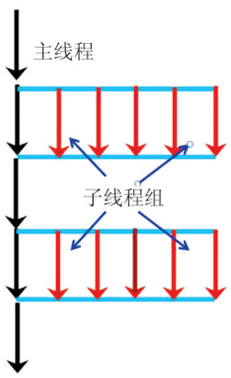


图1 OpenMP并行计算模型的工作机制

Fig. 1 Mechanism of OpenMP Parallel Computing

OpenMP是编译制导型的并行设计思路,通过定义一系列的编译导语指导程序在编译时按照具体的导语将程序编译成可以并行执行的程序。OpenMP支持C、C++和Fortran等编程语言,在原有串行计算上设置OpenMP编译制导语句,将制导语句指定的部分作为并行区域并行执行,一般选取的并行区域是计算程序中计算密集且可独立运行的部分,这样对程序做很小的改动就可以将程序改为OpenMP并行执行的程序[14]。常用的OpenMP导语有PARALLEL和END PARALLEL、DO和END DO、PRIVATE、NUM_THREADS等导语。

使用BDLS方法求解重力场模型系数时,法方程矩阵是块对角形式的,各法方程矩阵块相互独立,可以逐个构建和求解,所有法方程块的解组成最终的模型系数。如图1所示的求解模型可以设计为一个循环,循环的次数就是法方程矩阵块的总数,每次循环可以构建和解算法方程的一个块,得到该法方程块对应的系数,解算所有块就可得到待求模型系数。

BDLS方法计算程序的计算密集区域就是构建和求解法方程块的循环,由于不同循环间不相关,使用OpenMP的DO导语就可以将这个循环并行。在该循环外部添加OpenMP的PARALLEL和DO导语,声明该区域为并行执行的区域,将该任务分配到20个线程中,这样就可以将程序改为可在共享内存节点的多个计算核心上运行的并行程序。

1.2.2 MPI并行算法设计

MPI是面向分布式内存、基于消息传递的多进程并行计算模型,如图2所示,使用MPI并行模型时会在一定的规则下产生多个进程,它们可以在分布式内存计算机的多个节点上运行,这些进程通过通信交换数据、协作完成整个计算任务,具体的运行模式是:(1)启动时需要设置运行的进程数,启动后会产生多个进程,这些进程将运行在分布式计算机的多个节点上;(2)运行至并行区域后开始执行预先分配的计算任务;(3)在并行区域内,进程之间通过消息传递函数进行通信,传递数据;(4)程序结束[15-16]。

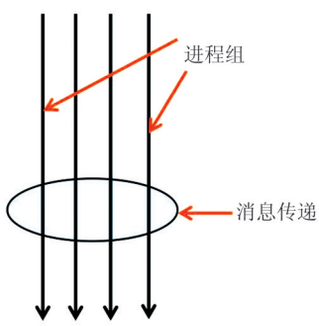


图2 MPI的工作机制

Fig. 2 Mechanism of MPI Parallel Computing

与OpenMP不同,MPI是消息传递机制的编程方法,通过定义一系列运行时的消息传递函数和其他函数实现计算任务的分配以及进程间的通信,通过消息传递函数实现进程组之间的协同工作。比较常用的函数有MPI_Init、MPI_Finalize、MPI_SEND、MPI_RECV、MPI_BCAST等。

BDLS方法的计算密集区是法方程块构建和求解的循环,按照MPI并行计算模型,MPI并行程序在运行时可以产生多个进程,每个进程负责一部分计算任务。在BDLS方法中,可以把循环分摊到每个进程中,每个进程负责一部分法方程块的构建及求解,并把它解算的系数都发送到主进程中,主进程先接收所有进程计算的解,然后把所有的系数输出。按照这种方法,本文设计了MPI并行的BDLS计算方法。

1.2.3 OpenMP+MPI混合并行算法设计

OpenMP和MPI并行计算模型有各自的缺点,OpenMP并行模型只能在单个节点运行,可完成的计算规模比较小,而MPI并行模型的缺点是并行运行的多个进程间无法共享内存,会浪费内

存空间,内存容易超过节点内存总量。使用OpenMP+MPI混合的并行模型可以发挥各自的优势,弥补缺点。一般混合并行算法设计的顺序是首先设计单一的并行计算方法,然后再添加另外一种并行模型的函数或者导语,形成混合并行计算模型。

§1.2.2设计了使用MPI并行的计算方法,在该算法的基础上,添加OpenMP的导语就可以将其改为OpenMP+MPI混合计算模型。混合编程中,一般将程序的MPI进程数设置为集群中的节点数,将OpenMP线程数设置为计算节点的计算核心数。并行程序运行时,每个进程独立运行在集群的一个计算节点上,进程内的线程运行在节点的计算核心上,进程间通过消息传递函数协同工作,同一个节点上的所有线程可以共享数据,减少内存消耗,降低数据传输时间。

2　数值计算与分析

本节通过数值实验分析SA方法和OpenMP+MPI高性能并行的计算效率。

2.1　使用SA方法解算模型系数

为分析采用SA方法求解重力场模型的计算精度,进行了如下数值实验:

1)使用EGM2008(359阶)模型计算了半径为6 378 136.3 m的球面上格网中心的重力异常点值数据,数据的分辨率为30′×30′,该重力异常数据记为GRAV30。

2)由GRAV30数据,使用SA方法计算得到重力场模型系数,记为Model-SA。

图3是Model-SA的系数阶误差均方根(root mean square, RMS),Model-SA全频段的系数阶误差RMS均小于10^{-17}量级,这是计算机截断误差造成的,说明由重力异常数据可以使用SA方法解算高精度的重力场模型系数。

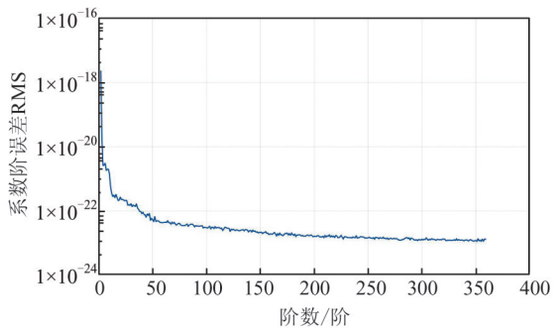


图3　Model-SA的系数阶误差RMS

Fig. 3　Degree Error RMS of Model-SA

BDLS方法是当前解算高阶重力场模型的常用方法,SA方法相对BDLS方法有两个方面的优势。

1)计算量更小。由BDLS方法的基本原理可知[7,9],同次的$\bar{C}_{nm}$和$\bar{S}_{nm}$系数的法方程是相互独立的,同次的$\bar{C}_{nm}$或$\bar{S}_{nm}$系数的奇数阶的法方程与偶数阶的法方程也是相互独立的,因此m次系数的法方程由4个不相关的对角块组成,其结构如图4(a)所示,NEQ-C-O代表m次$\bar{C}_{nm}$系数奇数阶的法方程,NEQ-C-E代表m次$\bar{C}_{nm}$系数偶数阶的法方程,NEQ-S-O代表m次$\bar{S}_{nm}$系数奇数阶的法方程,NEQ-S-E代表m次$\bar{S}_{nm}$系数偶数阶的法方程。

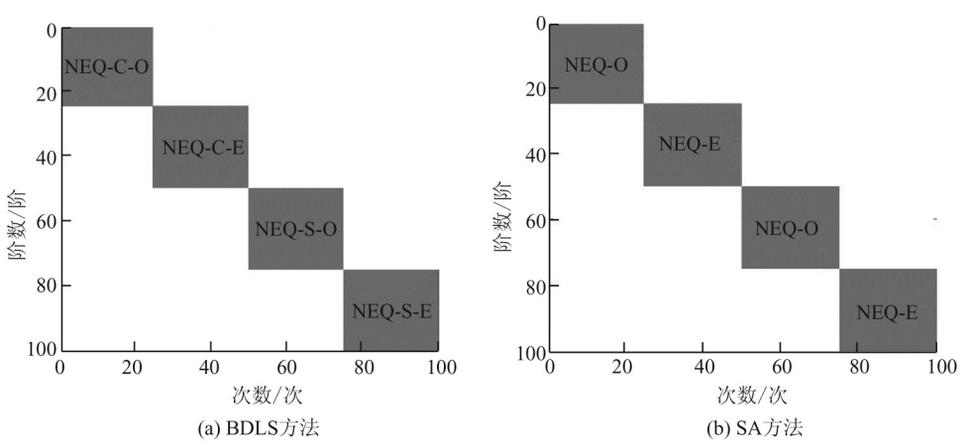


图4　BDLS方法和SA方法的法方程结构示意图

Fig. 4　Structure of Normal Matrix of BDLS Method and SA Method

以$\bar{C}_{nm}$系数为例,BDLS方法中法方程矩阵V　　的元素的计算公式为:

$$V_{ij}=\left(\frac{GM}{r^2}\right)^2(n_i-1)(n_j-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n_i+n_j}\sum_{p=1}^{N}\bar{P}_{n_i m}(\vartheta_p)\bar{P}_{n_j m}(\vartheta_p)\sum_{q=1}^{2N}\cos(m\lambda_q)\cos(m\lambda_q) \tag{9}$$

式中,V_{ij}表示法方程矩阵的元素;n_i和n_j分别表示法方程矩阵V中第i行和第j行元素相应的系数的阶;N表示全球格网纬度带的个数;p和q分别表示格网在第p个纬度带和第q个子午带。

SA方法的法方程结构与BDLS方法的法方程结构类似,其法方程矩阵元素的计算公式为:

$$V_{ij}=\left(\frac{\mathrm{GM}}{r^2}\right)^2(n_i-1)(n_j-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n_i+n_j}\sum_{p=1}^{N}\bar{P}_{n_im}(\vartheta_p)\bar{P}_{n_jm}(\vartheta_p) \tag{10}$$

对比式(9)和式(10)可知,SA方法的法方程元素不需要计算cos函数的内积,这是由于SA方法使用FFT将重力异常数据转换为LC系数时已经进行了三角函数的计算。由于法方程元素与三角函数无关,因此法方程中同次的$\bar{C}_{nm}$系数与$\bar{S}_{nm}$系数的法方程块是相同的,法方程的结构如图4(b)所示。因此在SA方法中,构建同次法方程时仅需要构建其中奇数阶和偶数阶系数的法方程,法方程构建所需的计算量减少了一半。

分别使用BDLS方法和SA方法,在单CPU环境下,由EGM2008(360阶)模型计算半径为6 378 136.3 m球面上的重力异常点值数据,解算重力场模型,使用BDLS方法解算359阶重力场模型的计算耗时为173.5 s,使用SA方法的计算耗时为24.8 s,使用SA方法的计算耗时约为BDLS方法的1/7。

2)内存消耗更小。使用SA方法时,同次的$\bar{C}_{nm}$系数和$\bar{S}_{nm}$系数的法方程矩阵是相同的,因此在计算时只需要构建$\bar{C}_{nm}$或$\bar{S}_{nm}$系数的法方程,只需存储一半的法方程。相对BDLS方法,SA方法可降低内存消耗。解算低阶次重力场模型时消耗的内存小,SA方法的优势不明显,在高分辨率模型解算中SA方法的优势可发挥出来。通常,高分辨率重力场模型解算会使用OpenMP或MPI并行计算方法,以OpenMP并行计算为例,一个计算节点通常运行多个线程,每个线程都需要构建私有的法方程等变量,开辟私有的内存空间,当节点上运行的线程较多时,节点内的内存难以满足这些线程的需求。

表1给出了使用OpenMP并行计算的程序运行32个线程时的内存需求,可知模型分辨率提高时并行程序的内存消耗会急剧增加,SA方法内存需求低,降低节点内存不足的风险。

2.2 OpenMP并行计算模型验证

根据§1.2.1设计的并行计算模型,编写了使用OpenMP并行编程的BDLS方法解算程序,并在共享内存的计算节点上进行了数值实验,计算节点上有20个主频为2.4 GHz的Intel Xeon CPU,数值实验的过程与§2.1的实验的思路类似:

表1 32个线程并行运行的法方程矩阵的内存需求

Table 1 Memory Requirements for the Normal Matrix of Parallel Computing with 32 Threads

分辨率	内存需求/GB
10′×10′	0.3
5′×5′	1.1
2′×2′	7.0
1′×1′	27.8

1)使用GRAV30为实验数据;

2)由GRAV30数据,使用BDLS方法解算得到重力场模型系数,记为Model-BDLS,该计算程序未使用OpenMP并行计算方法,并统计模型计算时间;

3)由GRAV30数据,使用BDLS方法计算得到重力场模型系数,记为Model-OpenMP,并统计模型计算时间。使用OpenMP并行编程,程序计算时使用了20个CPU,并行程序开辟了20个线程,每个CPU上运行一个线程。

图5是Model-BDLS和Model-OpenMP的系数阶误差RMS,两个模型的系数基本一致,系数阶误差RMS均小于10^{-17}量级,这源于计算机的截断误差,由此说明使用OpenMP并行解算模型的系数精度。未使用OpenMP并行编程之前,BDLS方法求解360阶模型的耗时为173.5 s,使用OpenMP并行编程后,求解360阶模型的耗时为9.2 s,仅为原程序的1/18.8。由于运行在不同核心上的线程同时读取共有变量会产生竞争,由此引起时间延迟,使得程序的运行时间未达到串行程序时间的1/20。

2.3 MPI并行计算模型验证

由GRAV30数据,根据§1.2.2设计的基于MPI的BDLS并行计算方法,计算了360阶的重力场模型系数,记为Model-MPI,并统计模型计算时间。模型解算时使用了两个计算节点,每个节点上使用了10个主频为2.4 GHz的Intel Xeon CPU,总共有20个进程。

图6是Model-MPI的系数阶误差RMS,均小于10^{-17}量级,这是由计算机的截断误差造成的,说明了MPI并行解算系数的准确性。未使用MPI并行编程之前,BDLS计算程序求解360阶模型的计算耗时为173.5 s,使用MPI并行编程

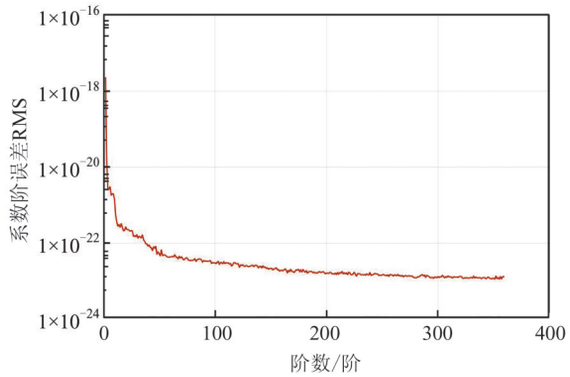


图 5　Model-BDLS 和 Model-OpenMP 的系数阶误差 RMS

Fig. 5　Degree Error RMS of Model-BDLS and Model-OpenMP

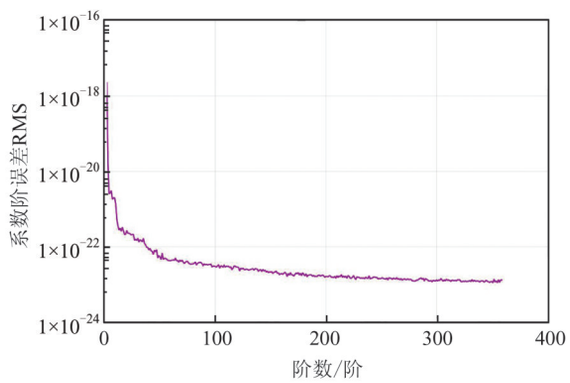


图 6　Model-MPI 的系数阶误差 RMS

Fig. 6　Degree Error RMS of Model-MPI

后,程序求解 360 阶模型的计算耗时为 9.3 s,为原程序的 1/18.6。同时,由于进程间通信等原因造成的时间延迟,使得程序的计算时间未达到串行程序时间的 1/20。

2.4　OpenMP+MPI 混合并行计算模型验证

根据§1.2.3 设计的 OpenMP+MPI 混合并行算法,使用混合并行计算模型系数解算了模型系数,系数精度与§2.2、§2.3 计算的模型基本一致,系数阶误差 RMS 均小于 10^{-17} 量级。计算耗时与使用的核心数相关,使用两个节点共 20 个核心的计算时间为 9.4 s,该计算时间为串行程序的 1/18.4。由此可见,使用 MPI 的并行效果理想,使用混合编程后,程序可适应当前主流的分布式集群服务器架构,在同一个节点上的所有线程可以共享数据,减少内存消耗,降低数据传输时间,这对大规模并行程序的计算效率提高更显著。

2.5　高分辨率重力场模型构建的高性能科学计算模型验证

在前文实验的基础上,联合 SA、OpenMP 和 MPI 计算的优势,对 SA 计算程序进行了 OpenMP+MPI 混合并行设计,构建了可在超大规模集群计算系统分布运行的 OpenMP+MPI 混合的高分辨率重力场模型解算程序。为了检验这个程序的准确性,进行了以下数值实验:

1)使用 XGM2019e 模型计算了球面半径为 6 378 136.3 m 的两组重力异常点值数据,数据的分辨率为分别 5′×5′(阶次截断到 2 159)阶和 2′×2′(阶次截断到 5 399 阶),该重力异常数据记为 GRAV5 和 GRAV2;

2)由两组重力数据,使用本文设计的 OpenMP+MPI 并行计算程序解算得到 5 399 阶重力场模型系数,并统计模型计算时间,计算得到的模型分别记为 Model-2159 和 Model-5399。模型解算时使用了 80 个 CPU,这些 CPU 分布在 4 个节点上,各节点上 CPU 数量相同。计算时共开辟了 4 个进程,每个进程在一个节点上运行,每个进程开辟了 20 个线程,每个线程运行在一个 CPU 上,同一个节点上的线程可以共享节点内的资源。

图 7 和图 8 分别是 Model-2159 和 Model-5399 的系数阶误差 RMS,在所有频段小于 10^{-18} 量级,这说明该并行程序可准确计算高分辨率重力场模型;Model-2159 模型解算的耗时为 0.5 h,Model-5399 模型解算的耗时为 23 h,虽然该计算耗时远大于 360 阶模型的计算时间,但考虑到模型参数较多,5 399 阶模型中有 29 159 996 个参数,运行时使用的资源有限,解算该模型的计算量庞大,该计算时间合理。

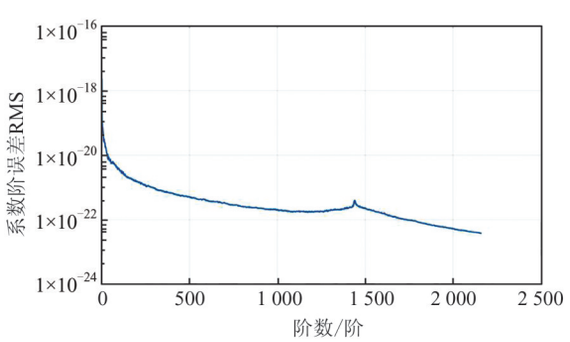


图 7　Model-2159 的系数误差

Fig. 7　Degree Error RMS of Model-2159

3　结　语

本文围绕高分辨率全球重力场模型 HPC 方法展开研究,将 SA 方法引入高分辨率重力场模型构建,同时采用 OpenMP+MPI 并行计算思路,设计了一种高分辨率全球重力场模型构建的高性能科学计算方法,该方法可在大型集群计算系

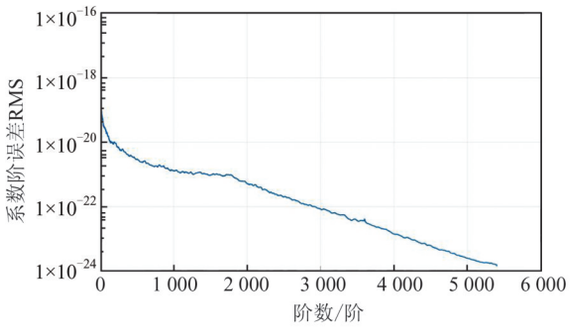


图8 Model-5399的系数误差

Fig. 8 Degree Error RMS of Model-5399

统下分布式运行。数值实验验证了计算方法的计算精度和效率,结果表明:

1)SA方法可以有效减少高分辨率重力场模型构建的计算量和内存消耗。

2)本文设计的OpenMP、MPI和OpenMP+MPI并行算法可有效应用于高分辨率重力场模型构建,构建360阶重力场模型时,使用20个计算核心,3种并行计算算法可以准确解算重力场模型系数,计算效率均为串行程序的18倍。

3)设计了联合SA方法和OpenMP+MPI混合并行计算模型的高分辨率重力场模型解算的高性能科学计算方法,该方法可以有效地在大型集群计算系统下分布式运行,使用本文编写的初步软件平台,利用4个节点的80个CPU可在1 d内完成5 399阶次高分辨率重力场模型的解算;将程序设计策略、法方程矩阵结构设计、高阶次勒让德函数递推方法等优化后,可进一步提高计算效率。

参 考 文 献

[1] PAVLIS N K, HOLMES S A, KENYON S C, et al. The Development and Evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)[J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2012, 117(B4): 2011JB008916.

[2] FÖRSTE C. EIGEN-6C4: The Latest Combined Global Gravity Field Model Including GOCE Data up to Degree and Order 1949 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse[C]//EGU General Assembly, Vienna, Austria, 2014.

[3] FECHER T, PAIL R, GRUBER T, et al. GOCO05c: A New Combined Gravity Field Model Based on Full Normal Equations and Regionally Varying Weighting [J]. *Surveys in Geophysics*, 2017, 38(3): 571-590.

[4] ZINGERLE P, PAIL R, GRUBER T, et al. The Combined Global Gravity Field Model XGM2019e [J]. *Journal of Geodesy*, 2020, 94(7): 66.

[5] LIANG W, LI J C, XU X Y, et al. A High-Resolution Earth's Gravity Field Model SGG-UGM-2 from GOCE, GRACE, Satellite Altimetry, and EGM2008[J]. *Engineering*, 2020, 6(8): 860-878.

[6] COOLEY J W, TUKEY J W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series [J]. *Mathematics of Computation*, 2019, 90: 297-301.

[7] COLOMBO O L. Numerical Methods for Harmonic Analysis On the Sphere[R]. Columbus: The Ohio State University, 1981.

[8] SNEEUW N. Global Spherical Harmonic Analysis by Least-Squares and Numerical Quadrature Methods in Historical Perspective[J]. *Geophysical Journal International*, 1994, 118(3): 707-716.

[9] PAVLIS N K. Modeling and Estimation of a Low Degree Geopotential Model from Terestrial Gravity Data [R]. Columbus: The Ohio State University Columbus, 1988.

[10] RUMMEL R, VAN GELDEREN M, KOOP R, et al. Spherical Harmonic Analysis of Satellite Gradiometry [M]. New York: Nederlandse Commissie voor Geodesie, 1993.

[11] SNEEUW N J. A Semi-analytical Approach to Gravity Field Analysis from Satellite[D]. Munich, Germany: Technische Universität München, 2000.

[12] PREIMESBERGER T, PAIL R. GOCE Quick-Look Gravity Solution: Application of the Semianalytic Approach in the Case of Data Gaps and Non-Repeat Orbits[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2003, 47(3): 435-453.

[13] 徐新禹. 卫星重力梯度及卫星跟踪卫星数据确定地球重力场的研究[D]. 武汉:武汉大学. 2008.
XU Xinyu. Study of Determining the Earth's Gravity Field from Satellite Gravity Gradient and Satellite-to-Satellite Tracking Data[D]. Wuhan: Wuhan University, 2008.

[14] CHAPMAN B, JOST G, PAS R. Using OpenMP: Portable Shared Memory Parallel Programming[M]. Massachusetts: MIT Press, 2007.

[15] GROPP W, LUSK E, SKJELLUM A. Using MPI-Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface[M]. Massachusetts: MIT Press, 1999.

[16] GROPP W, LUSK E, THAKUR R. Using MPI-2 Advanced features of the Message-Passing Interface [M]. Massachusetts: MIT Press, 1999.

[17] 周浩,钟波,罗志才,等. OpenMP并行算法在卫星重力场模型反演中的应用[J]. 大地测量与地球动力学,2011,31(5):123-127.
ZHOU Hao, ZHONG Bo, LUO Zhicai, et al. Application of Parallel Algorithms Based on Openmp to Satellite Gravity Field Recovery[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2011, 31(5): 123-127.

[18] MAYER-GÜRR T, BEHZADPOUR S, EICKER A, et al. GROOPS: A Software Toolkit for Gravity Field Recovery and GNSS Processing[J]. *Computers & Geosciences*, 2021, 155: 104864.

[19] 王鸿琰,关雪峰,吴华意. 一种面向CPU/GPU异构环境的协同并行空间插值算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2017,42(12):1688-1695.
WANG Hongyan, GUAN Xuefeng, WU Huayi. A Collaborative Parallel Spatial Interpolation Algorithmon Oriented Towards the Heterogeneous CPU/GPU System[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2017, 42(12): 1688-1695.

[20] 陈正生,吕志平,崔阳,等. 大规模GNSS数据的分布式处理与实现[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2015,40(3):384-389.
CHEN Zhengsheng, LÜ Zhiping, CUI Yang, et al. Implementation of Distributed Computing with Large-Scale GNSS Data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(3): 384-389.

[21] BROCKMANN J M, ROESE-KOERNER L, SCHUH W D. A Concept for the Estimation of High-Degree Gravity Field Models in a High Performance Computing Environment[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2014, 58(4): 571-594.

[22] BLACKFORD L S, CHOI J, CLEARY A, et al. ScaLAPACK Users' Guide[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

[23] HOFMANN-WELLENHOF B, MORITZ H. Physical Geodesy[M]. Vienna: Springer, 2006.